18/11/19

ΜΕΘΟΔΟΣ Euler

$$(1):\begin{cases} y' = f(t,y), & t\in[\alpha,b] \\ y(a)=y_0 \end{cases}$$

$$(2):\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^n,y^n) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

ΣΥΝΕΠΕΙΑ (συν. σφ.)

$$|\delta^n| = \frac{h^2}{2}|y''(\xi^n)|, \quad \xi^n\in(t^n, t^{n+1})$$

δηλ. $\delta^n = O(h^2)$

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

$$\underbrace{\max|y^n - z^n|}_{\|\varepsilon^n\|_\infty} \le e^{L(b-a)}|y^0 - z^0|$$

ΑΚΡΙΒΕΙΑ

$$\max|y(t^n) - y^n| \le \frac{M}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right)h$$

$$M = \max_{t\in[\alpha,b]}|y''(t)|, \quad \varepsilon^n = O(h)$$

37

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Σ.Δ.Ε. (μέθοδος του Euler)

$$(3) \begin{cases} \bar{y}' = \bar{f}(t, \bar{y}), & t \in [a,b] \\ \bar{y}(a) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

με $\bar{f} : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$

και λύση του ΠΑΤ. (3) είναι της μορφής:

$\bar{y} : [a,b] \to \mathbb{R}^m$.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ της Euler για σύστημα ΣΔΕ

$$y_i(t^{n+1}) = y_i(t^n) + h y_i'(t^n) + \frac{h^2}{2} y_i''(\xi^n), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad \xi^n \in (t^n, t^{n+1})$$

$\downarrow$

Taylor

Συνολικά: $\bar{y}(t^{n+1}) = \bar{y}(t^n) + h\bar{y}'(t^n) + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} y_1''(\xi_1^n) \\ y_2''(\xi_2^n) \\ \vdots \\ y_m''(\xi_m^n) \end{pmatrix}$

$\xi_i^n \in (t^n, t^{n+1})$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

όπου $\bar{y}(t^{n+1}) = \begin{pmatrix} y_1(t^{n+1}) \\ y_2(t^{n+1}) \\ \vdots \\ y_m(t^{n+1}) \end{pmatrix}$

Περιπτώσεις:

(1) $\|\cdot\|_\infty$, $\|\delta^n\|_\infty \le \frac{h^2}{2} \max_{1 \le i \le m} |y_i''(\xi_i^n)| \le \frac{h^2}{2} \max_i \left(\max_{t \in [a,b]} |y_i''(t)| \right)$

$$\|\delta^n\|_\infty \le \frac{h^2}{2} \max_i \left(\max_t |y_i''(t)| \right) = \frac{h^2}{2} \max_t \underbrace{\left(\max_i |y_i''(t)| \right)}_{\|y''(t)\|_\infty}$$

Άρα: $\|\delta^n\|_\infty \le \frac{h^2}{2} M$, $M = \max_{t \in [a,b]} \|y''(t)\|_\infty$

(2) $\|\cdot\|$, ισχύει ότι : $\exists\ c>0$, $\forall\ \bar{x} \in \mathbb{R}^m$:

$$\|\bar{x}\| \leq c\,\|\bar{x}\|_\infty$$

τότε $\|\delta^n\| \leq c\,\|\delta^n\|_\infty$, δηλ.

$$\|\delta^n\| \leq c\,\frac{h^2}{2}M \quad , M = \max_t \|y''(t)\|_\infty$$

Παρατήρηση : Θα διατυπώσουμε το Θεωρ. για την ακρίβεια της μεθόδου Euler για σύστημα ΣΔΕ, Θεωρώντας μια νόρμα του $\mathbb{R}^m$, $\|\cdot\|$.

ΘΕΩΡΗΜΑ : Έστω $\bar{f} : [0,b] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ συνεχής και πληροί την ολική συνθήκη Lipschitz.

Έστω $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_m)^T$, $y_i \in C^2([a,b])$, $i = 1,2,\ldots,m$.
Αν $\bar{y}^0, \bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^N$ είναι οι προσεγγίσεις με την βοήθεια της μεθόδου του Euler, με ομοιομ. διαμ. του $[a,b]$ και $h = \frac{b-a}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$ τότε:

$$\underbrace{\|\bar{y}(t^n)}_{\text{ακρ. λύση}} - \underbrace{\bar{y}^n\|}_{\text{προσ. λύση}} \leq \frac{M}{2L}\,c\left[e^{L(b-a)} - 1\right]h$$

$$M = \max_{t \in [a,b]} \|\bar{y}''(t)\|_\infty$$

Αν έχω $\|\cdot\|_\infty$: $\max \begin{pmatrix} |y_1(t^n) - y_1^n| \\ |y_2(t^n) - y_2^n| \\ \vdots \\ |y_m(t^n) - y_m^n| \end{pmatrix}$

Αν έχω $\|\cdot\|$: $\sqrt{(y_1(t^n) - y_1^n)^2 + \ldots + (y_m(t^n) - y_m^n)^2}$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν πάρω $\|\cdot\|_\infty$:

$$\max_n \|\bar{y}(t^n) - \bar{y}^n\|_\infty \leq \frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)} - 1\right]h$$

$$M = \max_t \|\bar{y}''(t)\|_\infty$$

<u>ΠΕΡΙΟΧΗ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ</u>

Υπάρχουν δύο ειδών μέθοδοι: άμεσες και πεπλεγμένες

<u>Άμεσες</u>: μικρή περιοχή απολυτ. ευστάθειας.

π.χ. ακολουθία: (αναδρ. τύπος)

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n)$$
$$y^0 = y_0$$

<u>Πεπλεγμένες</u>: μεγάλη περιοχή απολ. ευστάθειας.

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1})$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Μια αριθμητική μέθοδος για την επίλυση του ΠΑΤ (1) λέγεται απόλυτα ευσταθής, για κάποιο $h>0$, αν όταν εφαρμοσθεί στο πρόβλ. δοκιμής:

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \in [0, +\infty) \\ y(0) = 1, & \lambda \in \mathbb{C} \text{ με } Re(\lambda) < 0 \end{cases}$$

δίνει προσεγγίσεις που παραμένουν φραγμένες καθώς το $n \to +\infty$

Η περιοχή S, του μιγαδικού επιπέδου, τ.ω. η μέθοδος να είναι απολ. ευσταθής, ονομ. <u>περιοχή απόλυτης ευστάθειας</u> της μεθόδου.

Στην περίπτωση της Euler (μονοβ. μέθοδος) οι προσεγγίσεις παραμένουν φραγμ. για το πρόβλημα δοκιμής, για συγκεκριμένες τιμές του λh.

($|y^n| = |1+\lambda h|^n$ όταν το $(1+\lambda h) \le 1$ τότε έχουμε φρ. προσ.)

αν και μόνο αν: $|y^{n+1}| \le |y^n|$

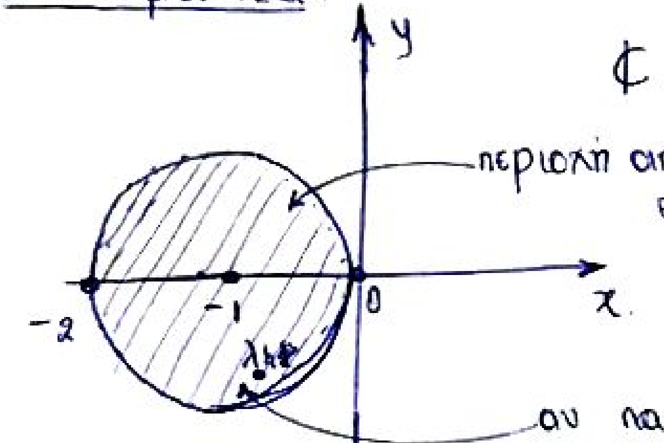
Έχω ένα είδος συστολής: οι αριθμητικές τιμές μικραίνουν.

Οι προσεγγίσεις παραμένουν φραγμένες όταν $|1+\lambda h| \le 1$ αν $z = \lambda h$.

τότε $|1+z| \le 1$ άρα η περιοχή απόλυτης ευστάθειας

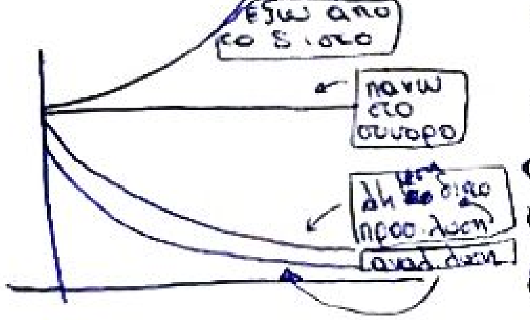
$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |1+z| \le 1 \}$$

Σχηματικά:



αν πάρω δηλ. ένα λh μέσα στο δίσκο η λύση θα είναι φραγμένη και θα συμπεριφέρεται όπως η αναλυτική.

αν το λh είναι πάνω στο δίσκο τότε παίρνεις ευθεία έξω αν είναι έξω θα πηγαίνει στο ∞.



↑
(SOS)

Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα

Π: (1) Άμεση, (2) Εύκολος προγραμματισμός.
(3) Απαιτεί ένα συναρτησιακό υπολογισμό.

Μ: (1) Χαμηλή τάξη ακρίβειας (1), $h \ll 1$
(2) Υπολογιστικό κόστος και σφάλματα στρογγυλευσης (μεγάλα)
(3) Μικρή περιοχή απόλυτης ευστάθειας.

Άμεση: όταν το αριθμητικό ~~σχήμα~~ σχήμα μπορεί να γραφεί ως μορφή ακολουθίας.

Πεπλεγ: όταν χρειάζομαι πληροφορία από άλλο βήμα

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

δεν μπορείς να κάνεις βήμα γιατί χρειάζεται συναρτησιακό υπολογισμό.

<u>π.χ</u> $f(t,y) = y^2$

$y^{n+1} = y^n + h(y^{n+1})^2$: μη γραμ. αλγ. εξίσωση

(Υ ή Μ;)

↳ βρίσκω δύο ρίζες

$y' = f(t,y)$ από (1)

$$y'(t^{n+1}) = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$

, Οπισθίες Πεπερ. Διαφορές

η διακριτή μορφή της πάνω ΔΕ. είναι:

$$\frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} = f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) \Rightarrow$$

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf(t^{n+1}, y(t^{n+1})).$$